Tentamen Mechanica 19 april 2010

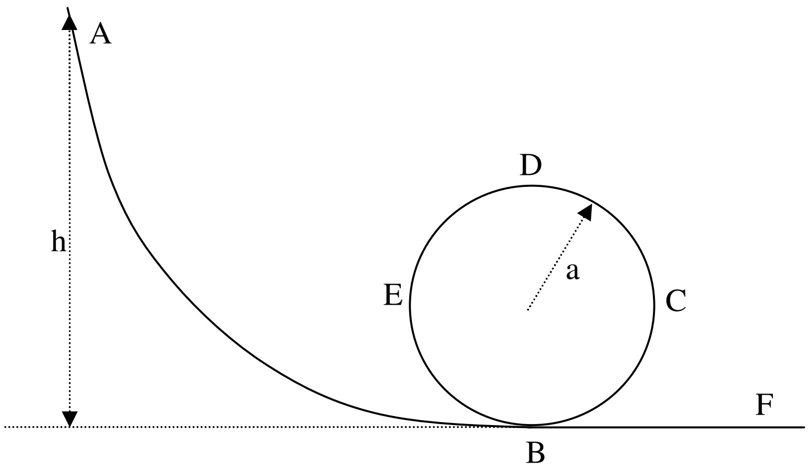
Opgave 1

Een voorwerp met massa M kan bewegen langs de x-as. Het voorwerp ondervindt (als enige kracht) een wrijvingskracht $F_x = -\gamma v$.
Op t = 0 bevindt het voorwerp zich op de positie $x = x_0$ en heeft het de snelheid $v = v_0$.

a) Geef de bewegingsvergelijking.
b) Bepaal de snelheid van het voorwerp als functie van t.
c) Bepaal de positie van het voorwerp als functie van t.

Opgave 2

Een kogel met massa m kan wrijvingsloos bewegen langs een rail waarin een cirkelvormige lus gebogen is. De kogel wordt losgelaten bij A en beweegt dan onder invloed van de zwaartekracht via de punten B, C, D, E, B naar F.



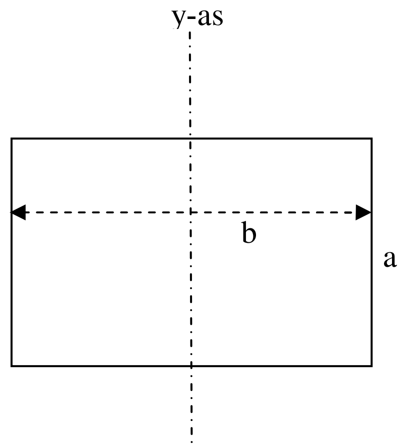
We nemen aan dat de snelheid van de kogel bij het doorlopen van de lus zo groot is dat hij nergens los komt van de rail.
g is de versnelling van de zwaartekracht.

Neem aan dat de kogel vanuit rust wordt losgelaten bij het punt A op hoogte h.

a) Geef de behoudswet die tijdens de beweging van de kogel van toepassing is.
b) Geef de snelheid van de kogel in het punt B in termen van g en h
c) Geef de snelheid van de kogel in D in termen van g, h en a.
d) Welke kracht zorgt er voor dat de kogel in D niet vrij komt van de rail ?
e) Hoe groot moet h (in termen van a) minstens zijn opdat de kogel bij D niet vrij komt van de rail ?

Opgave 3

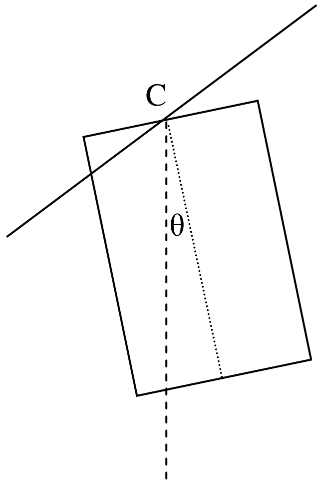
Een rechthoekige plaat met massa M heeft zijden a en b. De massa per oppervlakte eenheid wordt aangeduid met σ ($\sigma = M/ab$).



a) Bereken het traagheidsmoment I_y t.o.v. een as door het midden van de plaat parallel aan de zijde die de lengte a heeft (i.e. de y-as, zie figuur).

b) De plaat kan slingeren om een as die loodrecht op het vlak van de plaat staat en door het punt C gaat. C ligt op de rand van de plaat in het midden van een zijde met lengte a. Laat zien dat het traagheid moment t.o.v. deze as door het punt C, gegeven wordt door:

$$I_z = \frac{1}{12}Ma^2 + \frac{1}{3}Mb^2$$



c) De hoek θ geeft de uitwijking uit de evenwichtsastand aan (zie figuur).
Geef de bewegingsvergelijking voor deze slingering en bereken de trillingstijd in termen van a, b, M en de versnelling van de zwaartekracht g.

Opgave 4

Een kogel met massa m wordt, schuin omhoog, in zuidelijke richting afgeschoten op breedtegraad λ op het Noordelijk halfrond. .
De afstand die de kogel aflegt is zo klein dat men voor de hele weg van de kogel de breedtegraad als een constante mag beschouwen.
Kies een met de aarde meeroterend Cartesisch coördinatenstelsel dat zijn oorsprong heeft in het punt waar de kogel wordt afgeschoten, waarbij de positieve x-as in oostelijke richting wijst, de positieve y-as naar het noorden wijst, en de z-as samenvalt met de locale vertikaal. De eenheidsvectoren in dit stelsel worden aangeduid met $\vec{i}, \vec{j}$ en $\vec{k}$.
De kogel ondervindt een constante zwaartekracht die gegeven wordt door $\vec{F}_g = -mg\,\vec{k}$, waarin g de effectieve versnelling van de zwaartekracht is.
De kogel ondervindt een wrijvingskracht die gegeven wordt door $\vec{F}_w = -\gamma\,|\vec{v}|\,\vec{v}$, waarin $\vec{v}$ de snelheid van de kogel t.o.v. de omringende lucht is. Het is windstil.

a) Geef de bewegingsvergelijking van de kogel in het roterende stelsel in vectorvorm.
b) Laat zien dat de hoeksnelheid van de aarde in het gekozen coördinatenstelsel geschreven kan worden als: $\vec{\omega} = \omega\cos\lambda\,\vec{j} + \omega\sin\lambda\,\vec{k}$.
c) Schrijf de bewegingsvergelijking van de kogel in componenten.
d) Zijn de vergelijkingen bij c) separabel of niet-separabel ?